

البرهان غير المباشر ومشكلة التفاف البراهين ومعياريتها في الاستنباط الطبيعي للمنطق الكلاسيكي(*)

د. هانى مبارز حسن على عزازى

مدرس بقسم الفلسفة - آداب عين شمس

المخلص

تعد مشكلة التفاف^(١) detour البراهين في أنسقة الاستنباط الطبيعي مشكلة في غاية الأهمية، وهي مشكلة لا نجد مثيلاً لها في الأنسقة الأكسيوماتيكية. وهي تعنى، على نحو مبسط، تكرار خطوات البرهان، وهو أمر معيب من ناحية اشتقاق البراهين. لقد أدرك جنتسن G. Gentzen صاحب أول نسق في الاستنباط الطبيعي تلك المشكلة، وهو قد استطاع حلها بالنسبة لأنسقة الاستنباط الطبيعي الحدسية دون الكلاسيكية، من خلال مبرهنته على معيارية البراهين Hauptstaz / Normalization البراهين الحدسية، أى البرهنة على إمكانية حذف التفاف البراهين. ويعود الفضل إلى داج برافيتس D. Prawitz فى وضع أول برهان على معيارية براهين منطق الاستنباط الطبيعي الكلاسيكي من خلال استخدام قاعدة البرهان غير المباشر. فى هذا البحث سوف نتساءل عن قدرة تلك القاعدة على ذلك حقاً، وإمكانية وجود قاعدة بديلة]

الكلمات المفتاحية: برهان غير مباشر - التفاف البراهين - استنباط طبيعي - منطق حدسى - قانون بيرس

[Abstract:

The problem of the detour of proofs in natural deduction systems is a serious problem. We can not find a counterpart for this problem in axiomatic systems. It means, roughly speaking, repetition to the lines or steps of proof. This is a fault from a derivative point of view. G. Gentzen, the first logician to put a calculus for natural

(*) مجلة كلية الآداب جامعة القاهرة المجلد (٨٠) العدد (٣) أبريل ٢٠٢٠

deduction, knew this problem very well, he even could solve it in respect to intuitive natural deduction systems but not to classical ones. He solved that problem by his Hauptstaz or Normalization theorem for intuitive proofs, i.e. proving the possibility of eliminating the detours in proofs. It was Dag Prawitz who put the first proof of the normalization of proofs in natural deduction for classical systems by indirect proof rule. In this paper, I should scrutinize the ability of that rule of doing what wanted from it to do, and if there be an alternative one for it.]

عناصر البحث

١. تمهيد.
٢. نسق استنباط طبيعي وبعض التعريفات.
٣. جنسن والتفاف البرهان ومعياريته في الاستنباط الطبيعي.
٤. برافيتس والبرهان غير المباشر لأنسقة الاستنباط الطبيعي الكلاسيكية.
٥. ما بعد برافيتس وإمكانية الاستغناء عن البرهان غير المباشر.
٦. خاتمة

١. تمهيد

الاستنباط الطبيعي Natural Deduction هو زمرة الأنسقة المنطقية التي تشيد حسابها المنطقي طبقاً لفئة من قواعد الاستنتاج دون بديهيات^(٢)، فهي أنسقة تدرس الاستدلال من خلال الفروض. إن فكرة وضع قواعد للاستدلال من خلال الفروض، مُحصت منطقياً بداءة على يد ستانيسلاو ياسكوفسكى Stanislaw Jaskowski (١٩٠٦-١٩٦٥) وجيرارد جنسن Gerahrd Gentzen (١٩٠٩-١٩٤٥) في الوقت نفسه منذ ثلاثينيات القرن المنصرم (Pelletier, J. (F. & Hazen, P. A. 2012, p. 347 وهو ما أفضى إلى ظهور أنسقة الاستنباط الطبيعي في البرهان. لقد كان تناول ياسكوفسكى للاستدلال الفرضي تناوياً خطياً، بمعنى أنه يضع قواعد الاستدلال في خطوات رأسية متتابعة (Ibid., pp. 347-350)، وهو ما يعرف بالبعد الواحد في رسم خطوات الاستدلال، يكون الاستدلال فيه متتابعة sequence من السطور^(٣). هذا الاتجاه في رسم البرهان

أخذه تطور أنسقة الاستنباط الطبيعي على يد ويلارد كواين W.V. Quine (١٩٠٨-٢٠٠٠) وباتريك سبز P. Suppes (١٩٤٢-١٩١٤) وفريدريك فيتش F.B.Fitch (١٩٠٨-١٩٧٨) (Ibid., pp. 352-354) وأصبحت أنسقة الاستنباط الطبيعي أنماطاً تعرف بأسماء هؤلاء الرواد. أما نمط جنتسن فاتخذ بعداً ثنائياً^(٤)؛ بمعنى أنه يعرض لخطوات الاستدلال في صورة شجرة^(٥) (Ibid., p. 350)^(٦). لقد كان هدف جنتسن من وضع الاستنباط الطبيعي هو أن يقدم نسقاً منطقياً يتفق وخطوات الاستنتاج في الرياضيات من جهة، وأن يكون أساساً للمنطق الحدسى intuitionistic يمكن بإضافة بعض الصيغ له الانتقال منه إلى المنطق الكلاسيكى من جهة أخرى. ولقد انماز بعد جنتسن الثنائى الشجرى بالأصالة، إذ إنه يكشف عن صفات في البرهان لا يمكن إدراكها من خلال العرض الخطى لخطوات الاستدلال، منها: "أن الافتراضات هي الصيغ التى تقع على قمة الشجرة بحيث نستطيع من خلالها رؤية أية صيغة تستند على الأخرى، ويمكن كذلك البرهنة على أنه يمكن لاشتقاقين أن يؤلفا اشتقاقاً واحداً... وأنه يمكن عمل تباديل لترتيب تطبيق القواعد" (von Plato, J. 2012b, pp. 324-325). ولعل أهم خاصيتين للبرهان كشف عنهما جنتسن هما خاصتا التفاف roundabout or detour البرهان ومعياريته normalization. والتفاف البرهان بصورة عامة يعنى وجود خطوة ليس لها ضرورة، أما معيارية البرهان فتعنى انتفاء الخطوات غير الضرورية^(٧)، وهو الأمر الذى لا تكشف عنه بوضوح الطريقة الخطية في عرض البراهين. لقد كان التحدى الذى واجه جنتسن هو كيفية الانتقال من المنطق الحدسى إلى المنطق الكلاسيكى دون التفاف فى البراهين بسبب القواعد. لذا فقد عمل على البرهنة على معيارية نسقه فى الاستنباط الطبيعي سواء أكان حدسياً أم كلاسيكياً^(٨)؛ أى إمكانية حذف التفافات البراهين عن طريق خطوات معينة. لقد نجح جنتسن فى ذلك بالنسبة إلى المنطق الحدسى، فلقد اكتشف مؤخراً ذلك البرهان بخط يده^(٩). أما بخصوص المنطق الكلاسيكى فلم يقدم جنتسن برهاناً على معياريته. إلا أن

المناطق حاولوا ذلك بعد منه، ولعل أهمهم في ذلك الفيلسوف وعالم المنطق السويدي داج برافيتس D. Prawitz (١٩٣٦-) ومدرسته. ولقد استند أغلب هؤلاء المناطق إلى قاعدة البرهان غير المباشر indirect proof، وهي قاعدة الرد إلى المحال ad absurdum المشهورة.

بناء على ما سبق، تبدو أهمية الأسئلة التالية: (١) هل يمكن فعلاً لتلك القاعدة أن تحفظ معيارية البراهين في الاستنباط الطبيعي للمنطق الكلاسيكي؟ (٢) وما هو التعقل الذي يقف خلف تلك المحاولة؟ (٣) وهل هذا الحفظ بكافٍ؟ (٤) وإن كانت الإجابة بلا فهل ثمة قاعدة بديلة؟ هذا ما سنحاول الإجابة عنه في هذا البحث، فسنحاول أن نبين كيف تحفظ قاعدة البرهان غير المباشر لدى برافيتس ومدرسته معيارية البراهين وما هو التعقل الذي يقف خلف محاولة مدرسته، أما الإجابة عن السؤالين الآخرين فسنستعين بمقاربة عالم المنطق بي. جي. سيلدين P. G. Seldin للإجابة عنهما. ومن أجل كل ذلك؛ سوف ننشئ بدايةً -في القسم الثاني من هذا البحث- نسقاً للاستنباط الطبيعي (هو نسق جنتسن في الحقيقة)، موضحين من خلاله بعض المعاني المنطقية المهمة المستخدمة في البحث، لنعرض بعد ذلك - في القسم الثالث - لتناول جنتسن لمعيارية البراهين والتفافها (في المنطق الكلاسيكي خاصة)، ثم نعرض في القسم الرابع لحل برافيتس - من خلال تبني البرهان غير المباشر، ثم نعرض - في القسم الخامس - تطور هذا الحل على يد عالمي المنطق إيه. سايدرز A. Siders و جي. فون بلاتو J. von Plato، منتهين من جهة إلى توضيح إمكانية الاستغناء عن البرهان غير المباشر بفضل عمل عالمي المنطق الأمريكي إتش. بي. كيوري H.B. Curry (١٩٠٠-١٩٨٢) وسيلدين، وإلى مدى كفاية هذا الاستغناء من جهة أخرى. وأخيراً تأتي الخاتمة لنجمل نتائج البحث فيها.

٢. نسق استنباط طبيعي وبعض التعريفات

لننشئ بدايةً نسقاً استنباطياً طبيعياً بقواعد جنتسن للاستنتاج (نسقاً على النمط الجنتسنى). يعد معجم هذا النسق، أو تعد قواعد تكوينه مثل أغلب قواعد

تكوين الأنسقة الشائعة، فيما عدا احتوائه على ثابت التناقض 1 بوصفه عبارة ذرية، واحتوائه أيضاً على الإجراءات أو الروابط المنطقية الأربعة (فيما عدا النفى إذا كان منطقاً موجباً (انظر ما يلي)) الشائعة (العطف، والانفصال (الضعيف)، الشرط، والنفى) وعليه فهو يطلق عليه المنطق الممتلئ full.

أما قواعد تحويل النسق أو قواعده للاستنتاج (في صورة شجرية) ستكون كما يلي، علماً بأن قواعد التقديم على اليمين ويرمز لها بالحرف \rightarrow يتلوه الإجراءات المنطقى، أما قواعد الحذف فهى على اليسار ويرمز لها بالرمز \leftarrow يتلوه الإجراءات المنطقى (Genzen, G. 1934, p. 77):

$\frac{ق١ \& ق٢}{ق٣} \quad (\&٢)$	$\frac{ق١ \& ك١}{ق٢ \& ك٢} \quad (\&٣)$
$\frac{ق١ \& ك١}{ق٢} \quad (\&٣)$	$[ق١]$
	\cdot
	\cdot
	$\frac{ك١}{ق١ \& ك١} \quad (\&٣)$
	$\frac{ق١}{ق١ \vee ق٢} \quad (\vee٣)$
$\frac{[ق١] \quad [ك١]}{\cdot \quad \cdot}$	
$\frac{\cdot \quad \cdot}{\cdot \quad \cdot}$	
$\frac{ق١ \vee ك١}{ق١} \quad (\vee٢)$	
$\frac{\perp}{\cdot} \quad (\perp)$	$[ق١]$
$\frac{ق١}{\perp} \quad (\sim٢)$	\cdot
	\perp
	$\frac{\perp}{\sim ق١} \quad (\sim٣)$
$\frac{س١ \& س٢}{س٣} \quad ((٢))$	$\frac{س١}{س٢ \& س٣} \quad ((٣))$
$[س١]$	$\frac{س١}{(س٢) \& س٣} \quad (E٣)$
\cdot	
\cdot	
$\frac{س١}{\cdot} \quad (E٢)$	

١-٢ ملاحظات على قواعد جنتسن للاستنتاج وتعريفات

١. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسي {ق، ك، ل، ...} إلى أية صيغة formula من صيغ النسق. وجدير بالذكر أن هذه الصيغ هي صيغ شارحة أو بعد منطقية metalogical بمعنى أنها تسمى صيغ النسق الفعلية: فالصيغة الشارحة ق مثلًا قد تسمى صيغ النسق التالية: ق، ق ك، ق ك، ق ك، ق & ك، ق ~ ق، ق & (ق ك). وهى الصيغ التي يمكن ترجمتها على التعاقب إلى ما يلي: الشمس طالعة، إذا كانت الشمس طالعة فالجو صاف، إما الشمس طالعة وإما الجو صاف، الشمس طالعة والجو صاف، لم يصح طلوع الشمس، الشمس طالعة وإن كانت كذلك فالجو صاف.

٢. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسي {ه، و، ...} إلى محمولات predicates. وكما قلنا فى البند السابق، فإن هذه الرموز هي صيغ شارحة لمحمولات النسق م، ن، ... إلخ. ومثالها فى اللغة العربية: إنسان، حيوان، ... إلخ.

٣. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسي {أ، ب، ...} إلى أسماء أو ثوابت فردية individual constants. مرة أخرى، تشير هذه الرموز الشارحة إلى أسماء النسق وثوابته الفردية: أ، ب... إلخ. ومثالها فى اللغة العربية: أحمد، مبنى مجلس النواب، ... إلخ.

٤. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسي {س، ص، ...} إلى متغيرات فردية individual variables. تشير هذه الرموز الشارحة فى دورها إلى متغيرات النسق نفسه: س، ص، ... إلخ. ومثالها فى اللغة العربية: الأسماء المضمرة من قبيل المنفصلة أى هو، هي، ... إلخ.

٥. ترمز النقاط الثلاث العمودية فى البرهان الشجرى إلى وجود اشتقاق derivation من الصيغة/الصيغ التي فوقها إلى الصيغة التي تحتها. ونقصد بالاشتقاق، بصورة فضفاضة، وجود استنباط باستخدام قواعد الاستنتاج.

٦. $r=1$ أو $r=2$. \perp يعنى صيغة متناقضة. () السور الكلى. (E) السور الوجودى.

٧. يشير القوسان المعقوفان حول الصيغة إلى أن افتراضها قد فض discharged (von Plato, J. 2012, p. 327). وعليه، حين لا يُفض الافتراض يطلق عليه افتراض مفتوح open assumption، وحين يفض يقال عليه افتراض مغلق.

٧. تُقرأ الصيغ من اليمين إلى اليسار. مع ملاحظة قراءة الصيغ الحملية مثل \forall \exists أو \forall \exists من اليسار إلى اليمين. فنقول \exists هو \forall ، وأ \forall هو \exists .

٨. تشير الرموز التي فوق الخط العرضى إلى الصيغ المستنتج أو المُشْتَق منها، بينما تشير الصيغة التي تحت الخط إلى الصيغة المستنتجة أو المشتقة بناء على القاعدة التي تُكتب على يمين خط الاستنتاج بين قوسين. وهكذا، فإننا نستطيع تفسير وشرح قواعد الاستنتاج - على الطريقة الشجرية - فى النسق كما يلى:

٨.أ. تُستنتج الصيغة العطفية $\&$ ك (تحت الخط) من الصيغتين \forall و \forall وك اللتين فوق الخط بقاعدة تقديم العطف ($\&$) التى تُكتب على يمين الخط^(١٠). مثال ذلك:

الشمس طالعة الجو صاف

-----($\&$)

الشمس طالعة والجو صاف

٨.ب. تُستنتج الصيغة الانفصالية \vee \forall \forall (تحت الخط) من الصيغة \forall التى فوق الخط بقاعدة تقديم الانفصال (\vee) التى تُكتب على يمين الخط:

الشمس ساطعة

-----(\vee)

إما الشمس ساطعة وإما الجو صاف

الشمس ساطعة

----- (٧٤٣)

إما الجو صاف وإما الشمس ساطعة

٨.ج. تُستنتج الصيغة $\forall x$ (تحت الخط) من الصيغة $\forall x \& ١$ $\forall x$ التى فوق الخط بقاعدة حذف العطف ($\&$) التى تُكتب على يمين الخط:

الشمس طالعة والجو صاف

----- ($\&$)

الشمس طالعة

الشمس طالعة والجو صاف

----- ($\&$)

الجو صاف

٨.د. تُستنتج الصيغة $\forall x$ (تحت الخط) من الصيغتين $\forall x$ $\forall x$ $\forall x$ اللتين فوق الخط بقاعدة حذف الشرط أو إثبات المقدم (\supset) التى تكتب على يمين الخط:

إذا كانت الشمس طالعة فالجو صاف الشمس طالعة

----- (\supset)

الجو صاف

٨.هـ. تُستنتج الصيغة $\forall x$ $\forall x$ (تحت الخط) بواسطة (\supset) من خلال افتراض الصيغة $\forall x$ (فوق الخط) واشتقاق منها (وهو ما نعبر عنه بالنقاط العمودية الثلاث التى تحت بعضها البعض) الصيغة $\forall x$. وإذ يحدث ذلك فنحن نكون فى حل من الفرض $\forall x$ وهو ما نعبر عنه بوضع الصيغة/الفرض $\forall x$ بين القوسين المعقوفين []:

[الشمس ساطعة]

.
.
.

الجو صاف

----- (ب) -----

إذا كانت الشمس ساطعة فالجو صاف

٨.و. تستنتج الصيغة ل (تحت الخط) بواسطة (ص) من خلال الصيغة ق ل (فوق الخط) عن طريق افتراض كل من الصيغة ق والصيغة ل واشتقاق من كليهما الصيغة ل. وإذ يحدث ذلك فنحن نكون في حل من الفرضين/الصيغتين ق ولك وهو ما نعبر عنه بوضع الصيغتين/الفرضين ق ولك (كل في موقعه) بين القوسين المعقوفين []:

[الشمس طالعة] [الوقت ظهرًا]

.
.
.

إما الشمس طالعة وإما الوقت ظهرًا الوقت نهار الوقت نهار

----- (ص) -----

الوقت نهار

٨.ز. تستنتج الصيغة (س) م س (تحت الخط) بواسطة (ب) ((التي تكتب على يمين الخط من خلال الصيغة م أ (فوق الخط) شريطة ألا يظهر أ في النتيجة، أو يكون مفترضًا في افتراض مفتوح لم يغلق. مثال ذلك:

كل هرم ثلاثى منتظم له أربعة أوجه

----- (())

هذا الهرم الثلاثى المنتظم له أربعة أوجه

٨.ح. تستنتج الصيغة μ أ (تحت الخط) من الصيغة (س) μ س (فوق الخط) بواسطة القاعدة (())، التي تكتب على يمين الخط، دون قيد أو شرط لأى أ. مثال ذلك:

كل إنسان له رأس واحدة

----- (())

آدم له رأس واحد

٨.ط. تستنتج الصيغة (E) μ س (تحت الخط) من الصيغة μ أ (فوق الخط) بواسطة (E) التي تكتب على يمين الخط، دون قيد أو شرط:

آدم له رأس واحدة

----- (E)

البعض له رأس واحدة

٨.ى. تستنتج الصيغة ل (تحت الخط) من الصيغة (E) μ س (فوق الخط) بواسطة (E)، التي تكتب على يمين الخط، عن طريق افتراض الصيغة μ أ واشتقاق الصيغة ل من الأخيرة على ألا يظهر أ في (E) μ س أو ل. وإذ يحدث ذلك فنحن نكون فى حل من الفرض/الصيغة، وهو ما نعبر عنه بوضع الفرض/الصيغة μ أ بين القوسين المعقوفين [].

[حسن أبيض]

.
.

.

بعض البشر بيض بعض البشر لهم بشرة

----- (E)-----

بعض البشر لهم بشرة

٨.ك. تستنتج الصيغة ل (تحت الخط) من أية صيغة متناقضة \perp (فوق الخط)

بالقاعدة (⊥) التي تكتب على يمين الخط:

\perp

----- (⊥)-----

غزا الأتراك الإسكيمو

٨.ل. تستنتج الصيغة ~ ق (تحت الخط) من نقيضها الصيغة ق (فوق الخط)

بواسطة قاعدة تقديم النفي (~)، التي تكتب على يمين الخط، عن طريق

افتراض الأخيرة ثم اشتقاق تناقض/صيغة متناقضة \perp منها. وإذ يحدث

ذلك يُغلق الفرض/الصيغة ق بوضعه بين القوسين المعقوفين []:

[العدد الأصم نسبيًا]

.

أقل صورة نسبية للجذر التربيعي للعدد اثنين تتضمن عددين زوجين

أقل صورة نسبية للجذر التربيعي للعدد اثنين لا تتضمن عددين زوجين

\perp

----- (~)-----

العدد الأصم ليس نسبيًا

٨.م. تستنتج الصيغة \perp (تحت الخط) بواسطة (~) في حال وجود صيغة ق

ونفيها ~ ق (فوق الخط)

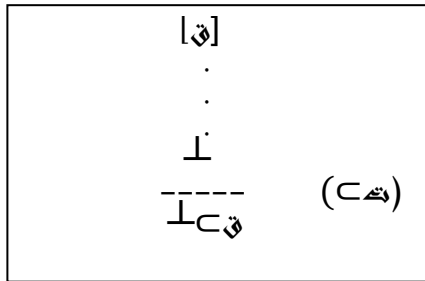
الجو صاف وليس صافياً

----- (~ع)
⊥

٩. في الاشتقاقات والبراهين التي تأخذ صورة شجرية، تعد كل صيغة عدا الصيغة النهائية endformula، مقدمة لقاعدة فتقف فوق الخط، وتعد كل صيغة فيما عدا الفروض نتيجة قاعدة فتقف تحت الخط. وهكذا ففي الاشتقاق الشجرى الصيغ التي ليس فوقها خط تعد بمثابة فروض. (Gentzen, G. 1934-1935/1969, pp. 72-73).

١٠. يطلق على الصيغة التي تشتمل على إجراء أو رابط connective منطقي، العلامة أو الصيغة الرئيسية Principal formula (Prawitz, D. 1965, p. 15) على حد تعبير داج برفايتس، وتعد هي المقدمة الكبرى major premise أثناء استخدام قاعدة الحذف التي تتطلب مقدمتين.

١١. تعد كل من (ع) و (~ع) أو تقديم النفي وحذفه حالتين خاصتين على التعاقب من (ع) و (~ع) أو تقديم الشرط وحذفه (Prawitz, D. 1965, p. 21 ; von Plato, j. 2003, p. 21). فبالنسبة لتقديم النفي (ع) فإنه يمكن التعبير عنه كحالة خاصة من تقديم الشرط (ع) كما يلي:



فمن افتراضنا للصيغة ق التي ينتج عنها تناقض نستطيع بعد فض الصيغة ق التأكيد بأنه إذا كانت ق كان تناقض أو ⊥. ومن هذا نجد أن النفي يمكن التعبير عنه بوصفه عبارة يلزم عنها تناقضاً، فيمكن تعريف النفي بذلك

أمثلة له في: (Hackstaff, L. H. 1966, p. 232 Seldin, P.J. 1989,)
(p.195). ومن الصيغ المميزة لهذا المنطق: $(\sim C \sim C) \sim C$. وكذلك: $C \sim \sim C$.

١٣. ج. المنطق الحدسي: تفضى قواعد المنطق الأقل مضافاً إليها قاعدة حذف التناقض (\perp) إلى المنطق الحدسي (Parawitz, D. 1965, p. 21).
ومن الصيغ المميزة لهذا المنطق: $\sim C \sim C$ ($C \sim C$)

١٣. د. قبل الانتقال في تدرجنا إلى المنطق الكلاسيكي تجب الإشارة إلى أن المنطق الحدسي نموذج نسق جنتسن الذى أجملنا قواعد استنتاجه عاليه، وهو مستوحى من منطق آرنت هاييتنج A. Heyting للقضايا (Heyting, A. 1930b/1998). ومن أهم سمات هذا المنطق (Fitch, B. F. 1952, p. 58 ; Hackstaff, H. L. 1966, pp. 219- 223; Heyting, A. 1930a, pp. 306-308) من (١) الناحية الدلالية: هو تأويله لمعنى النفي؛ فالنفي بالنسبة للويتسن بروفر Luitzen Brouwer وآرنت هاييتنج يعنى الاستحالة أو عدم القدرة على إنشاء برهان. فالقضية $\sim C$ معناها استحالة إنشاء برهان للقضية C . هذا الفهم الدلالى كان موجهاً للفهم التركيبى التالى: (٢) الناحية التركيبية: هو عدم القدرة على البرهنة على قانون الثالث المرفوع (إذا لم يكن لدينا برهان على C فلا يعنى ذلك استحالة وجود برهان أو $\sim C$ ، بعبارة أخرى إذا كانت C كاذبة لا يعنى ذلك أن $\sim C$ صادقة). وعدم القدرة على البرهنة كذلك على قانون نفي النفي (إذا كان من المستحيل وجود برهان على كذب C أو إذا كان $\sim \sim C$ ، فلا يعنى ذلك أن C صادقة أي لها برهان أي إننا لا نستطيع الانتقال من $\sim \sim C$ إلى C). ومن سماته التركيبية كذلك عد الروابط مستقلة وغير قابلة للتعريف ببعضها البعض.

١٣. هـ. المنطق الكلاسيكي: من أجل الحصول على المنطق الكلاسيكي من المنطق الحدسي لا بد من إضافة قاعدة أخرى، هذه القاعدة اختلف عليها مناطق الاستنباط الطبيعى، لا بسبب مبدأ التسامح الكارنابى (Carnap, R.)

في إنشاء الأنسقة، ولكن لأنها غالبًا ما تتعارض مع معيارية البرهان وقد تفضى إلى التفاهة كما سنرى. لقد كانت قاعدة البرهان غير المباشر هي المرشح الأول لهذا منذ جنتسن ومرورًا ببرافيتس وصولًا إلى سايدرز وفون بلاتو. لننظر الآن في معنى معيارية البرهان في الاستنباط الطبيعي، ونرى علاقته وإشكالياته بتلك القاعدة.

٣. جنتسن والتفاف البرهان في الاستنباط الطبيعي

قواعد الاستنتاج السابقة، بمعينة قواعد التكوين، تشكل نسق جنتسن الحدسي في الاستنباط الطبيعي. ويلاحظ أن تلك القواعد تجمع بين إما أخذ التناقض وإما النفي كحد أولى. وعلى وجه العموم انتهى جنتسن إلى أخذ التناقض كحد أولى (von Plato, J. 2013, p. 48).

على أية حال، لقد تبين لجنتسن إمكانية وجود التفاف في براهين الاستنباط الطبيعي، وإذا قد حددنا في المقدمة الالتفاف بمعنى الخطوات غير الضرورية أو الزائدة أو الفائضة عن الحاجة، فعلينا الآن أن نحدد معناه الدقيق. لنأخذ المثال التالي: لينزل أننا نشق من أحد الفروض القضية ق ، ونشتق من فرض آخر القضية ك ، ثم نستخدم بعد ذلك قاعدة تقديم العطف ($\text{ك} \& \text{ق}$) لنشتق ق ، وبعد هذا نستخدم قاعدة حذف العطف (ك) لنشتق القضية ق أو القضية ك . صورة هذا الاشتقاق ستكون كما يلي:

$\begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \text{ك} \quad \text{ق} \\ \hline (\text{ك} \& \text{ق}) \\ (\text{ق} \& \text{ك}) \\ \hline \text{ق} \end{array}$

لقد قمنا في هذا الاشتقاق بدس (ق & لـ) في البرهان دون داعٍ، فنحن إذ اشتقنا ق كان بإمكاننا الاستمرار في البرهان دون اشتقاق (ق & لـ) أو اللف roundabout حولها ومن ثم التفاف detour البرهان. ونحن إذ نستخدم قواعد للتقديم والحذف في البراهين، ومن ملاحظة إننا قد استخدمنا التقديم ثم الحذف في المثال السابق، فإنه يمكن تعريف الالتفاف كما يلي:

تعريف التفاف البرهان: يكون البرهان ملتفًا حين تسبق قاعدة الحذف التي تطبق على مقدمة كبرى قاعدة تقديم من نوعها نفسه.

هذا هو الالتفاف، وهو يحدث في بقية إجراءات الاستنباط الطبيعي من شرط وانفصال ونفى إن كان الأخير إجراءً أولياً. وظاهرٌ أنه يزيد تعقيد البراهين. وعليه، فقد حدد جنتسن ضرورة أن يكون البرهان على شاكلة ما أطلق عليه الصيغ المعيارية normal forms، أي الصيغ التي ليس فيها التفاف (أي الصيغ التي تبدأ بقاعدة تقديم ثم بقاعدة حذف من النوع نفسه)، وبرهن على تحققها في نسقه الحدسي فيما يعرف بمعيارية Hauptsatz أو normalization البرهان، ومن ثم يمكن تعريف البرهان المعياري في نسق جنتسن الحدسي للاستنباط الطبيعي - طبقاً لصياغة بيليتير وهاتسن له - كما يلي (Pelletier, (F.J. & Hazen, A. P. 2012, p. 370):

تعريف البرهان المعياري: هو البرهان الذى لا توجد فيه صيغة تكون مستنتجة بواسطة قاعدة تقديم من ناحية، ومقدمة (كبرى) لاستنتاج آخر بقاعدة حذف من ناحية أخرى.

معنى هذا أن البراهين المعيارية في الاستنباط الطبيعي لدى جنتسن تبدأ بتفكيك الفروض المركبة إلى صيغ ووحدات أبسط من خلال قواعد الحذف، ثم تعود فتركب من جديد تلك الصيغ التي فُكَّكت في صورة جديدة بواسطة قواعد التقديم. ينتج عن هذا أن صيغ براهين الاستنباط الطبيعي لها خاصة الصيغة الفرعية subformual property التي يمكن تعريفها - طبقاً لبيليتير وهاتسن - كما يلي (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 370):

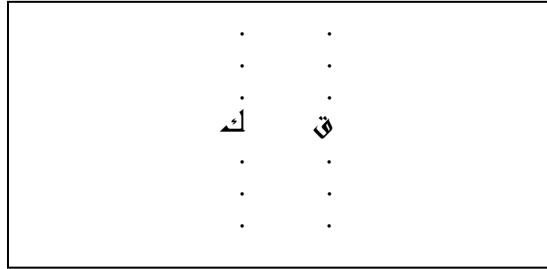
تعريف خاصة الصيغة الفرعية: كل صيغة تحدث في البرهان المعياري هي صيغة فرعية للنتيجة أو لأحد الفروض.

ويوجز جنتسن كل ذلك بالقول: "إن المعيارية Hauptsatz تقول إن كل برهان منطقي محض يمكن رده إلى صيغة معيارية محددة وإن لم تكن فريدة. وقد نعبر عن الخواص الجوهرية للصيغة المعيارية بالقول: إنها ليست ملتفة. فلا يوجد تصورات تدخل في البرهان غير تلك التصورات الموجودة قبل في نتيجته النهائية، وكان استخدامها من ثم أساسياً للوصول إلى تلك النتيجة" (Gentzen, G. 1934/1969 p. 69).

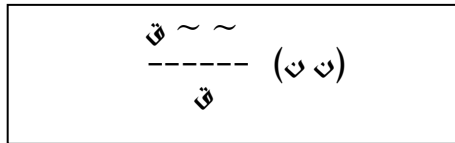
قلنا إن جنتسن قد قدم برهاناً على معيارية الاستنباط الطبيعي الحدسي نشر بعد وفاته (Gentzen, G. 1933/2008, pp. 245-257). وهو قد استخدم لأجل ذلك - فيما يخص النفي - قاعدة حذف النفي فقط أو قاعدة (⊥) مستخدماً ثابت التناقض كحد أولى، ومن ثم مستغنياً عن قاعدة تقديم النفي (قدم جنتسن هذه القواعد في الفصل الأول من أطروحته غير المنشورة ١٩٣٣، وقد أجزها فون بلاتو في: von Plato, J. 2008, p. 242). وهنا تجب التفرقة بين البرهان على الصيغة المعيارية من ناحية، والبرهان على معيارية الحساب المنطقي من ناحية أخرى: "تؤكد مبرهنة الصورة المعيارية بأنه يوجد لكل برهان في النسق برهان معياري نظير، له نفس النتيجة ونفس المقدمات (أو فئة جزئية منها). هذا بينما مبرهنة المعيارية الأقوى تؤكد بأنه يوجد إجراء procedure (معقول) متى طُبق على برهان معلوم يحوله إلى برهان معياري نظير" (Pelletier, F. J. & Hazen, A. P. 2012, p. 370). لم يقدم جنتسن برهاناً على الصيغة المعيارية فحسب بل هو قدم كذلك برهاناً على وجود إجراء لجعل البرهان معيارياً. وهذا الإجراء يتلخص في اكتشاف الالتفاف ثم حذفه (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 371). أو بعبارة فون بلاتو: "ينأسس برهان جنتسن في معيارية البرهان على مقياس لتعقيد الاشتقاقات. وكل تحويل [للبرهان] يقلل من ذلك التعقيد حتى نصل إلى اشتقاق معياري" (Von

(Plato, J. 2013, p.37) ^(١٢).

وعليه، ففي مثالنا السابق بعد أن اكتشفنا الالتفاف، فإنه علينا طبقاً لمبرهنة المعيارية، أو الإجراء المعيارى أن نقوم بحذفه، ومن ثم بتقليص طول البرهان كما يلي:

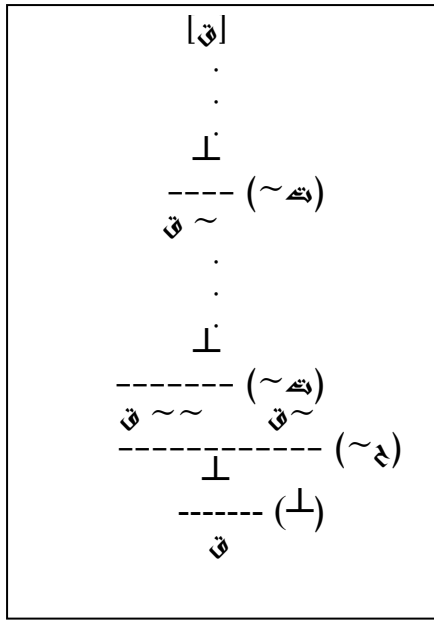


ماذا الآن عن الاستنباط الطبيعي للمنطق الكلاسيكى؟ هل يمكن صياغة مبرهنة المعيارية أو حتى الصورة المعيارية بالنسبة له؟ بداية، حتى يُحصَل على الاستنباط الطبيعي للمنطق الكلاسيكى من قواعد الاستنتاج التي عرضناها في القسم الثانى من هذا البحث، يضيف إليها جنتسن قاعدة جديدة ألا وهى قاعدة نفى النفى أو $\neg \neg$ (إضافة إلى قاعدة تقديم النفى) وهو يصوغها كما يلي (Gentzen, G. 1934/1965, p. 81):



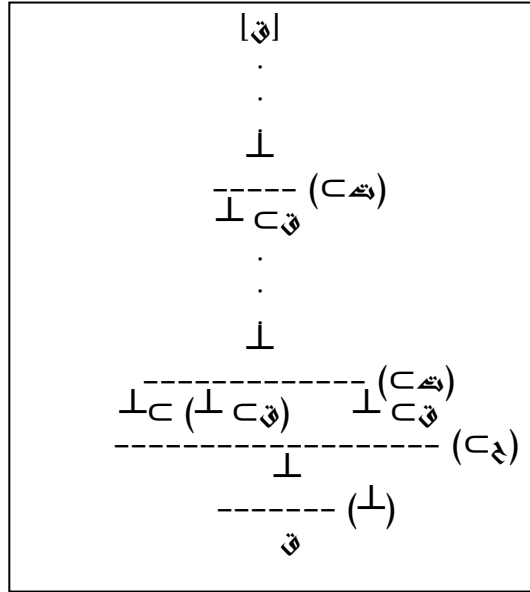
وهى تعد بمثابة قاعدة حذف للنفى جديدة على حد تعبير جنتسن (Gentzen, G. 1934/1965, p. 81) بخلاف قاعدة حذف النفى المذكورة في القسم الثانى. وهى تماثل إضافة بديهية الوسط المرفوع إلى بديهيات النسق الحدسى. ولكن في هذه الحالة، سوف يكون الالتفاف في البرهان كامناً built in

في القاعدة نفسها بمعايير المنطق الحدسي. ولتوضيح ذلك نقول إننا اتفقنا على أن قاعدتي تقديم النفي وحذفه هما حالتان خاصتان من تقديم الشرط ونفيه، ليكن الأمر كذلك، هذا من ناحية. ولكننا من ناحية أخرى سنكتشف أن قاعدة نفي النفي في دورها هي حالة خاصة من استخدام متعاقب لقاعدتي تقديم الشرط أو النفي ثم حذفه (ثم استخدام قاعدة \perp). وهكذا فعلى اعتبار استخدام قاعدتي تقديم النفي وحذفه سنجد أن قاعدة نفي النفي تخضع للصورة التالية طبقاً لمعايير الاستنباط الطبيعي الحدسي:



معنى هذا؛ أننا إذا افترضنا القضية Q واشتققنا منها تناقضاً، فبتطبيق قاعدة تقديم النفي نتوصل على نفيها أي $\sim Q$ ، ومن هذه القضية الجديدة إذا اشتققنا تناقضاً آخر فنحن نصل إلى نفي النفي $\sim \sim Q$ بتطبيق جديد لتقديم النفي، وبمعنى افتراض $\sim Q$ مرة أخرى نستنتج منها ومن $\sim \sim Q$ تناقضاً من خلال تطبيق حذف النفي. وأخيراً نصل إلى Q بتطبيق قاعدة التناقض. يتضح من هذا أن قاعدة نفي النفي ما هي إلا التناقض مقلع نستخدم فيه قاعدة التقديم

ثم قاعدة الحذف للرباط نفسه، وفي حالتنا هنا إجراء النفي حيث استخدمنا تقديم النفي مرتين ثم استخدمنا من بعدهما حذف النفي مباشرة.
أما في حالة تأويل قاعدة نفي النفي على أنها حالة خاصة لقاعدتي إجراء الشرط فإن الموقف سيكون بالمثل كما يلي:



معنى هذا مرة أخرى؛ أننا إذا افترضنا القضية ق واشتققنا منها تناقضاً، فبتطبيق قاعدة تقديم الشرط نتحصل على $(\perp \text{C} \text{ق})$ ، ومن هذه القضية الجديدة إذا اشتققنا تناقضاً آخر فنحن نصل إلى نفي النفي $(\perp \text{C} (\perp \text{C} \text{ق}))$ بتطبيق جديد لتقديم الشرط، وبافتراض $(\perp \text{C} \text{ق})$ بمعية $(\perp \text{C} (\perp \text{C} \text{ق}))$ نصل إلى تناقض، وذلك من خلال تطبيق حذف الشرط. وأخيراً نصل إلى ق بتطبيق قاعدة التناقض. يتضح من هذا، مرة أخرى، أن قاعدة نفي النفي ما هي إلا التفاف مقنع نستخدم فيه قاعدة التقديم ثم قاعدة الحذف للرباط نفسه، وفي حالتنا هنا إجراء الشرط.

لقد كان جنتسن على دراية بأن قاعدة نفي النفي تشكل عائقاً في إثبات

معيارية براهين المنطق الكلاسيكي (Gentzen, G. 1934/1965, p.81)، لذا فهو قد تخطى عن تلك المهمة واكتفى بأن أثبت معيارية براهين الاستنباط الطبيعي الحدسي من جهة، وأن ابتكر حساب المتتابعات sequents ليثبت من خلاله معيارية براهين المنطق الكلاسيكي في الاستنباط الطبيعي من جهة أخرى (von Plato, J. 2012, p. 330). لكن هذا لم يثن مناطق الاستنباط الطبيعي عن البحث عن قاعدة تفضي إلى معيارية المنطق الكلاسيكي، ولقد كانت قاعدة البرهان غير المباشر خير مرشح لذلك.

٤. برفايتس والبرهان غير المباشر لأنسقة الاستنباط الطبيعي الكلاسيكية:

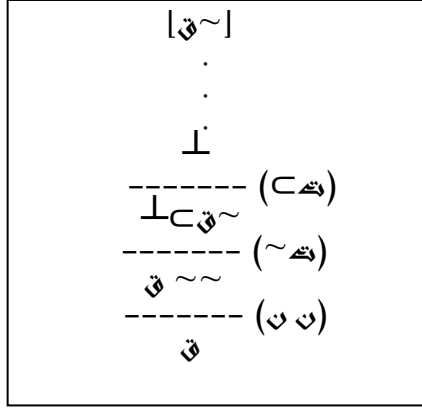
لعل القصور الذي أوضناه في قاعدة نفي النفي هو الذي جعل من برفايتس يستخدم قاعدة البرهان غير المباشر indirect proof. فبدلاً من قاعدة نفي النفي يضع برفايتس في نسقه للاستنباط الطبيعي الكلاسيكي قاعدة البرهان غير المباشر التالية (التي نختصرها بـ $\neg \text{E}$):

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} [\sim Q] \\ \vdots \\ \perp \\ \text{---} (\text{بـ } \neg \text{E}) \\ Q \end{array}} \end{array}$$

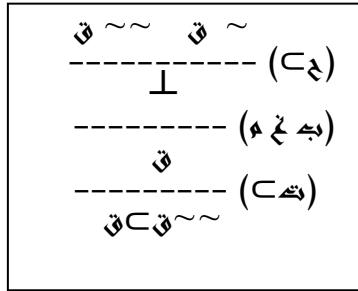
يبدو أن برفايتس بذلك ينطلق بسهولة من المنطق الحدسي إلى المنطق الكلاسيكي. فكل شيء يبدو على ما يرام؛ فقاعدة البرهان غير المباشر هي صيغة مقنعة لقانوني الثالث المرفوع ونفي النفي اللذين يحتاجهما المنطق الحدسي ليصير كلاسيكياً، فهي تخفي وراءها قانون نفي النفي، وقانون نفي النفي يتخفي في دوره وراءها.

فهى تتخفي وراء قانون نفي النفي "إذ يمكن اشتقاق نتيجتها من قانون

نفى النفى " (von Plato, 2013, p. 81). وذلك كما يبين الاشتقاق التالى (ibid.).



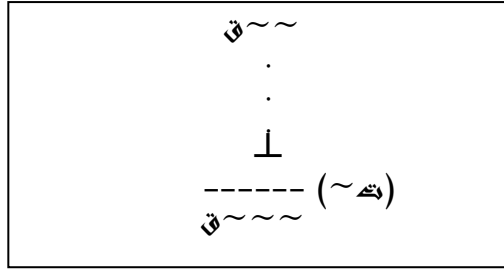
وهى تخفى وراءها قانون نفى النفى إذ يمكن اشتقاق قانون نفى النفى منها كما يلى (ibid.):



فمن فرض ~ ق ~ ق ~ ثم فرض ~ ق ~ نصل إلى ⊥ بحذف الشرط، ثم نصل إلى ق بالبرهان غير المباشر وبذلك نكون قد أغلقنا الفرض ~ ق ~ ثم نصل إلى نفى النفى أو ~ ق ~ ق ~ بإغلاق الفرض ~ ق ~ عن طريق تقديم الشرط.

الوصول من ثم إلى مبرهنات المنطق الكلاسيكى سهل يسير. ولكن يبدو أن الأمور لا تسير بهذه البساطة خاصة إن وضعنا في اعتبارنا أهمية الاحتفاظ بمعيارية براهين المنطق الكلاسيكى بالنسبة لكافة الروابط.

بداية، تبين هذه القاعدة أهمية أن تكون النتيجة موجبة، وذلك من خلال كون الافتراض يسبقه إجراء النفي؛ وعليه فهي تبين كذلك أهمية أن تكون النتيجة ليست سالبة؛ إذ إن كانت سالبة فمعنى ذلك أنه يمكن اشتقاق النتيجة طبقاً لقواعد المنطق الحدسي فقط، وذلك كما يلي:



ولكن طبقاً للمنطق الحدسي فإن $\sim p$ تلزم من $\sim\sim\sim p$ ($\sim\sim\sim p \rightarrow \sim p$) (von Plato, J. 2012, p.) بل وهي ستصبح حالة خاصة لتقديم الشرط أو تعريف النفي كما تبين في القسم الثاني من هذا البحث. والحقيقة إننا حتى لسنا في احتياج لكل هذا البيان؛ فلقد برهن عالم المنطق جلافينكو على أنه "إذا كان كذب تعبير معين في منطق القضايا قابل للبرهنة في المنطق الكلاسيكي فإن هذا الكذب نفسه قابل للبرهنة في منطق بروفر [الحدسي]" (Glavenco, V. 1929/1998, p. 301). وهو ما يفضي في الحال إلى ضرورة أن تكون نتيجة البرهان غير المباشر موجبة حتى تكون نتيجة في المنطق الكلاسيكي دون المنطق الحدسي. وعليه؛ فإن قاعدة البرهان غير المباشر لن يكون لها أية فائدة - في المنطق الكلاسيكي - إن استخدمناها من أجل اشتقاق نتائج سالبة. بناء على ما سبق؛ تأتي أهمية ضرورة تقييد قاعدة البرهان غير المباشر من ناحية إيجاب النتيجة. ومع هذا فقد ترخص بارافيتس في هذا التقييد، ولم ير أنه ضروري (Prawitz, D. 1965, pp. 20-21)؛ فيبدو إنه لم ير خطورة كبيرة في عدم التقييد ذاك. إلا أن التقييد ضروري كما أوضحنا وإلا ظللنا في المنطق الحدسي ولم نتجاوزه إلى المنطق الكلاسيكي.

على أية حال؛ يمكن توجيه سهام النقد السالفة، بل وغيرها، إلى قاعدة البرهان غير المباشر. وأهم ثلاثة انتقادات تقع تحت جنس واحد لتلك القاعدة هي ما يلي:

١. القاعدة تخفى التفافاً.

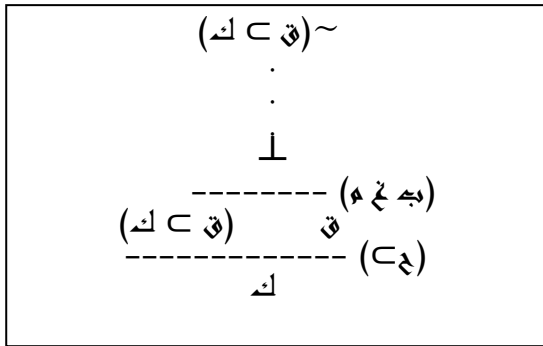
٢. القاعدة تقضى إلى تعقيد مفهومي.

٣. القاعدة تقضى إلى إلغاء خاصة الصيغة الفرعية.

٤-١. بخصوص الالتفاف الذى تخفيه قاعدة البرهان غير المباشر، يكفى أن ننظر للكيفية التي عرضنا بها طريقة تخفى البرهان غير المباشر وراء نفى النفي فيما سبق. ففي المخطط الذى يعرض لذلك التخفى نجد أننا قد بدأنا بقاعدة تقديم الشرط ثم قاعدة تقديم النفي ثم قاعدة نفى النفي، ولكن تقديم النفي هو تقديم للشرط كما بينا في القسم الأول بند ١١، بينما نفي النفي هو حذف النفي كما بينا عاليه، وهكذا فقاعدة البرهان غير المباشر تتضمن تقديمًا للنفي يعقبه مباشرة حذفٌ للنفي وهو التفاف. ويعبر بيللتير وهاتسن خير تعبير عن هذا النقد بالقول: "إن تلك القاعدة يمكن أن تنكسر إلى خطوتين: فبناء على اشتقاق تناقض من ~Q، فإن الخطوة الأولى تؤكد ~Q عن طريق الصورة الحدسية الصحيحة للرد إلى المحال (أي عن طريق قاعدة تقديم النفي المعيارية لأنسقة الاستنباط الطبيعي للمنطق الحدسى)، أما الخطوة الثانية فتقوم على استنتاج Q ... عن طريق قاعدة حذف النفي المزدوج. فكر في الأمر على هذا النحو، فثمة مشكلة مباشرة: نمط الاستنتاج الخاص الذى يسمح للبراهين الكلاسيكية التي ليست صحيحة حدسيًا يبدو وأنه "التفاف" على نحو جوهرى، أعنى أن ثمة قاعدة تقديم تستخدم من أجل استنتاج نفي مزدوج يستخدم بعد ذلك كمقدمة لقاعدة حذف، مما يفضى إلى أنه لن يوجد برهان كلاسيكي باطل حدسيًا يمكن له أن يكون معيارياً وذلك بناء على هذا التأويل العفوى "للمعيارى" (Pelletier, (F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 372).

إن ردة فعل برافيتس على هذا النقد هو اعتباره أن البرهان غير المباشر غير قابل للتحليل، أو بمعنى آخر أخذه على نحو أولى (Ibid.)!

٤-٢. أما بخصوص التعقيد المفهومي؛ فيعرفه بيليتير وهاتسن على أنه: "الاستمرار في بناء البرهان (بدون التفافات واضحة ربما) من مقدمات بسيطة نصل بها إلى برهان ... لصيغة مركبة وطويلة للغاية، ثم اشتقاق، بعد ذلك (مرة أخرى عن طريق وسائل تنتظر فيما هو معيارى) نتيجة بسيطة من الصيغة المركبة الأخيرة" (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P.) (2012, p. 372). ويمكن إيضاح ما يريد قوله بيليتير وهاتسن بلغتنا الرمزية التي تبنيها في هذا البحث كما يلي من خلال المخطط البرهانى التالى:



وهكذا فنحن قد توصلنا بواسطة البرهان غير المباشر - من خلال افتراضنا للصيغة $\sim (Q \supset K)$ - إلى نتيجة مركبة ألا وهى $(Q \supset K)$ ، ثم توصلنا، بواسطة الأخيرة وبمعنى الافتراض Q - وهو مزيد من التركيب - إلى نتيجة أبسط (حيث حذفنا إجراء الشرط) ألا وهى K . معنى هذا أن الاستنباط السابق ينافى فكرة البرهان المعيارى في الاستنباط الطبيعى نفسه التي أشرنا إليها سابقاً، ألا وهى الاستنباط من خلال التبسيط أو تحليل المقدمات إلى عناصرها ثم تركيب تلك العناصر مرة أخرى معاً في النتيجة. وهو ما عبر عنه

برافيتس نفسه بالقول: "ينتقل الاستنباط في صورته المعيارية من افتراضات الاستنباط إلى النتيجة على نحو مباشر وخال من الالتفافات. ويمكن القول بصورة تقريبية إن الافتراضات تُكسر في البداية إلى أجزائها عن طريق التطبيق المتتابع لقواعد الحذف، ثم تُجمع أجزاؤها تلك بعد ذلك كى تشكل النتيجة عن طريق التطبيق المتتابع لقواعد التقديم" (Prawitz, D. 1965, p. 8). وهذا ليس إلا خاصة الصيغة الفرعية للبرهان المعيارى. فبناء على ذلك التصور للبرهان (المعيارى) في الاستنباط الطبيعى، فإنه يلزم أن كل صيغة في البرهان هي صيغة فرعية لفرض ما أو للنتيجة، فهي صيغة فرعية للفرض لأننا نقوم بتكسير الفروض، وهى صيغة فرعية للنتيجة؛ لأن الأخيرة ما هي إلا تجميع لصيغ البرهان. وبناء عليه:

٣-٤. فإن قاعدة البرهان غير المباشر لن تقضى إلى تعقيد مفهومي فحسب بل هي ستقضى أيضاً إلى غياب خاصة الصيغة الفرعية عن البرهان ومن ثم افتقاده لخاصة المعيارية (von Plato, J. 2013, p.85).

كيف يحل برافيتس هذه المعضلات؟ هو بداية -كما أشرنا قبل- لا يعترف بأن قاعدة البرهان غير المباشر تعد بمثابة قاعدة تقديم يتبعها بالضرورة قاعدة حذف؛ إنه يعتبرها قاعدة أولية غير قابلة للتحليل. وبهذا فهو يتفادى النقد الأول الذى يقرر أن التفاف البرهان قار في قاعدة البرهان غير المباشر. أما بخصوص النقيدين الثانى والثالث فإن برافيتس يشترط أن تكون نتيجة قاعدة البرهان غير المباشر صيغة ذرية^(١٣). وبهذا لن توجد إمكانية استنتاج صيغة ذات رابط رئيس ثم حذفه بعد ذلك بواسطة قاعدة حذف. إن برافيتس قد تجنب على هذا النحو النقيدين الثانى والثالث بضرية لازب. بل وهو قد وضع بعد ذلك مبرهنته على الصيغة المعيارية في المنطق الكلاسيكى ذي قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. ولكن هذا في مقابل التضحية باكتمال منطق الدرجة الأولى ذي قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. فمن خلال تعريف برافيتس للبرهان المعيارى على النحو الذى يقيد قاعدة البرهان غير المباشر "إن مبرهنة الصيغة

المعيارية لن تنطبق إلا إذا كان النسق ذو القاعدة الكلاسيكية المقيدة للحالات الذرية مكتملاً *complete* بالنسبة إلى المنطق الكلاسيكي؛ بمعنى أنه من الممكن البرهنة باستخدام القاعدة الكلاسيكية في صورتها المقيدة على كل شيء استطعنا البرهنة عليه بواسطتها ولكن دون تقييد" (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 372). إن ما يقصده بيلتير وهاتسن هو أنه إذا كان لدينا صيغة تحصيل حاصل *tautology* أو صحيحة *valid* في المنطق الكلاسيكي الذي لا يستخدم قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة فلا بد لهذه الصيغة نفسها أن تكون مشتقة أو مبرهنة في النسق الكلاسيكي الذي يستخدم قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة، وهذا معنى الاكتمال الذي يقصده. نسق برافيتس الكلاسيكي مكتمل بالطبع ولكنه ليس كذلك إن ظللنا نستخدم قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. ويقدم بيلتير وهاتسن صاحباً هذا النقد الحالة التالية (Ibid.): (S) $(\neg E)$ ~ م ص $(\neg V)$ م ص $(\neg V)$ م ص $(\neg V)$ م ص $(\neg V)$ م ص. هذه الصيغة لئن كانت صحيحة في المنطق الكلاسيكي إلا أنه لا يمكن استنتاجها بواسطة قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة، وهو ما ينفي اكتمال نسق برافيتس أو أي نسق يعتمد على قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. ليس هذا فحسب، بل إن برافيتس إذ برهن معيارية براهين النسق ذي قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة إلا أنه لم يبرهن ذلك بخصوص الانفصال والسور الوجودي (Yuuki, A. 1994, p. 153)، أو ما يطلق عليه المنطق الكلاسيكي الممتلئ *full*، واكتفى من أجل ذلك بحقيقة أنه -في المنطق الكلاسيكي- يمكن تعريف الانفصال من خلال الروابط الأخرى بينما يمكن تعريف السور الوجودي بواسطة السور الكلي والنفي (Pelletier, F. J. & Hazen, A. P. 2012, p.). إن أضفنا إلى كل ذلك ما قلناه عن ترخص برافيتس في ضرورة أن تكون نتيجة قاعدة البرهان غير المباشر موجبة أصبح موقف برافيتس صعب القبول.

٥. ما بعد برافيتس وإمكانية الاستغناء عن البرهان غير المباشر

هناك في إطار التقليد البرافيتسي، محاولة من قبل أنيكا سايدرز وجان

فون بلاتو للاحتفاظ بقاعدة البرهان غير المباشر من الانتقادات التي وجهت إليها (von Plato, J. & Siders, A. 2012). وينص فون بلاتو - تلميذ برافيتس - قبل كل شيء صراحة على ضرورة أن تكون نتيجة البرهان غير المباشر موجبة (von Plato, J. 2013, p. 82) متفادياً بضربة لازب الانتقاد بالترخص الذى وجهناه إلى برافيتس في القسم السابق.

على أية حال؛ تستند محاولة سايدرز وفون بلاتو أساساً على فكرة غياب خاصة الصيغة الفرعية نتيجة تطبيق البرهان غير المباشر دون تقييد (von Plato, J. 2013, p.85) فهو قد يؤدي إلى استخدام قاعدة تقديم ثم قاعدة حذف، هذا من جهة، وهى من جهة أخرى تفرض تقييداً آخر على تلك القاعدة ولكن هذا التقييد لا يقوم على وجوب أن تكون نتيجة القاعدة صيغة ذرية. إن هذه المحاولة تقوم بعمل تحويل تبادلي permutative للبرهان الذى يحتوى على غياب لخاصة الصيغة الفرعية. فهى، على وجه الإجمال، تشتت من أجل منع غياب خاصة الصيغة الفرعية أن تكون قاعدة البرهان غير المباشر هي آخر قاعدة تستخدم في البرهان (von Plato, J. 2012, p.87). وبلغه سايدرز وفون بلاتو "إن الاشتقاقات الممتدة في الاستنباط الطبيعى القياسى بواسطة قاعدة البرهان غير المباشر تتحول إلى صورة ليس فيها مقدمة كبرى لقاعدة حذف مستنتجة بواسطة البرهان غير المباشر" (von Plato, J. & Siders, A. 2012, p. 209). وهذا الاشتراط ينطبق على جميع قواعد الحذف والتقديم (ibid.)^(١٤) كما تثبته مبرهنة المعيارية لفون بلاتو وسايدرز. وحتى تتضح الأمور بصورة أكبر نعطي التوضيح الآتى: إن كان لدينا البرهان التالى (ibid.) بواسطة قاعدة البرهان غير المباشر:

$$\begin{array}{c}
 \sim (ق \& ك) \\
 \vdots \\
 \perp \\
 \hline
 (ب \text{ في } م) \\
 (ق \& ك) \\
 \hline
 (ع) \\
 ق
 \end{array}$$

وهو البرهان الذي يقوم على قاعدة تقديم (ب في م) ثم قاعدة حذف (ع) وهو ما يخالف فكرة معيارية البراهين وخاصة الصيغة الفرعية معًا كما أشرنا، هذا البرهان يمكن لنا أن نحوله إلى برهان معيارى يحتفظ بخاصة الصيغة الفرعية عن طريق عمل التحويل التباديلى للصيغ وللبرهان غير المباشر في البرهان وذلك كما يلي (Ibid.):

$$\begin{array}{c}
 (ق \& ك) \\
 \hline
 (ع) \\
 ق \sim \quad ق \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 (ع) \\
 \hline
 (ع) \\
 \sim (ق \& ك) \\
 \vdots \\
 \perp \\
 \hline
 (ب \text{ في } م) \\
 ق \\
 \cdot
 \end{array}$$

وتفسير هذا البرهان كما يلي: نحن قد افترضنا بداية ~ ق ثم افترضنا بعد ذلك (ق & ك) ثم طبقنا قاعدة حذف العطف فحصلنا على ق، وبمعنى ~ ق

وبتطبيق حذف الشرط توصلنا إلى تناقض، وعليه فقد توصلنا من الفرض (ق) & ك) إلى تناقض وبإغلاقه بتطبيق تقديم الشرط توصلنا إلى ~ (ق & ك) التي أفضت إلى تناقض، هذا التناقض هو نتيجة فرضنا الأول ~ ق) الذى نغلقه الآن بقاعدة البرهان غير المباشر فنحصل على النتيجة المطلوبة ق)، وهى هي نفسها نتيجة البرهان السابق المعيب معيارياً.

إن الفكرة الرئيسة التي تقف خلف التحويل التباديلى لعمل سايدرز وفون بلاتو هي: أن نفترض في البرهان المعيارى نقيض النتيجة النهائية في البرهان غير المعيارى (وهو في حالتنا الفرض الأول ~ ق)، وبذلك نضمن أن نطبق عليه البرهان غير المباشر كآخر قاعدة نطبقها. ثم نفترض بعد ذلك في برهاننا المعيارى النتيجة التي توصلنا إليها بواسطة البرهان غير المباشر في البرهان غير المعيارى (وهو في حالتنا الفرض الثانى ق) & ك) ثم نقوم بإغلاق الفرض الثانى على نحو معيارى، ثم بعد ذلك نغلق الفرض الأول بقاعدة البرهان غير المباشر.

ليس هذا فحسب بل إن فون بلاتو وسايدرز قدما برهاناً على معيارية كافة روابط المنطق الكلاسيكى، بما فيها الانفصال والسور الوجودى وذلك بعد عمل تعديل لقواعد الحذف (von Plato, J. & Siders, A. 2012, pp. 205-) (209).

والسؤال الآن: هل حقاً خرجت قاعدة البرهان غير المباشر من مستنقع الانتقادات التي حامت حولها؟ يبدو أنه قد يُحْتَفَظ بقاعدة البرهان غير المباشر إن تبيننا مقارنة سايدرز وفون بلاتو. ولكن بعيداً عن التقييدات الملحة على القاعدة من جهة برفايتس أو التباديل التي يعملها عليها سايدرز وفون بلاتو من أجل الحفاظ على القاعدة، فإنه يبدو أن ثمة إفراطاً فى هذه القاعدة، أو على حد تعبير سلدين "هي أقوى مما هو ضرورى، وسوف تعطينا المنطق الكلاسيكى عندما تضاف إلى المنطق الأقل" (Seldin, P. J. 1989, p. 193).

لم يوضح سيلدين كيف نحصل على المنطق الكلاسيكى من المنطق

الأقل بإضافة قاعدة البرهان غير المباشر. ولعل ما يعنيه نجده في منطوق كيورى H. Curry لمبرهنته الثالثة للسياغات T للنفي^(١٥). على أية حال؛ يبدو أن مقصد سيلدين هو ما يلي:

المنطق الأقل نحصل عليه - كما أشرنا في القسم الأول - من خلال إضافة النفي أو رمز التناقض \perp إلى المنطق الموجب، فإن أضفنا قاعدة البرهان غير المباشر إلى هذا المنطق، وطبقاً لما بيناه من قبل في القسم السابق فإننا نستطيع أن نبرهن على نفي النفي بواسطة البرهان غير المباشر، ونفي النفي مكافئ لقانون الثالث المرفوع، فلا يتبقى إلا قاعدة \perp الحدسية للحصول على المنطق الكلاسيكي. ولكن قاعدة \perp هي حالة خاصة، من البرهان غير المباشر" (Prawitz, D. 1965, p. 21)، في دورها. فماذا نريد أكثر من هذا كي نحصل على مبرهنات المنطق الكلاسيكي!! ألم يقل جنتسن إننا في حاجة فقط إلى قاعدة نفي النفي أو مبرهنة الثالث المرفوع للحصول على مبرهنات المنطق الكلاسيكي من المنطق الحدسي، ولكن إذا كان لدينا هاتان المبرهنتان أو القاعدتان وكانت القاعدة التي يمتاز بها المنطق الحدسي حالة خاصة من قاعدة البرهان غير المباشر التي لدينا؛ فإننا نستطيع من ثم استخراج المنطق الكلاسيكي من المنطق الأقل. وعليه؛ فإن سيلدين محق في أن قاعدة البرهان غير المباشر تقدم أكثر مما هو ضروري للخروج بالمنطق الكلاسيكي من المنطق الحدسي.

إن ما يقصده سيلدين كذلك هو أننا نريد المنطق الكلاسيكي من المنطق الحدسي وليس من المنطق الأقل. قاعدة البرهان غير المباشر تستطيع أن تعطينا مبرهنات المنطق الكلاسيكي بمجرد إضافتها إلى المنطق الأقل، لذا فهي أقوى جداً مما هو ضروري بينما نحن في حاجة إلى قاعدة إن أضفناها إلى المنطق الأقل لا تعطينا مبرهنات المنطق الكلاسيكي بل هي تعطينا الأخير إن أضفناها إلى المنطق الحدسي. وهي كذلك ستحتفظ بخاصة الصيغة الفرعية ومعيارية البراهين حتى للانفصال والسور الوجودي دون إجراء تعديل

على قواعد الحذف كما فعل سايدرز وفون بلاتو. إن وجدت هذه القاعدة فهي بالتأكيد ستجب قاعدة البرهان غير المباشر؛ وهي موجودة. لقد قدم كيورى هذه القاعدة، التي أطلق عليها (ن د)، كما يلي:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} [\sim Q] \\ \vdots \\ \vdots \\ Q \\ \hline (ن د) \\ Q \end{array}} \end{array}$$

إن قاعدة (ن د) لن تعطينا المنطق الكلاسيكى بإضافتها إلى المنطق الأقل، بل هي ستعطينا المنطق الكلاسيكى إن أضفناها إلى المنطق الحدسى. ولقد برهن كيورى على هذا فيما أطلق عليه المبرهنة الثالثة للصيغات T للنفي. لن نعرض لهذه المبرهنة بالتفصيل حيث إنها طويلة وتستخدم قواعد لم نطرحها في هذا البحث من ناحية، وهي ليست موضع دراستنا في هذا البحث من ناحية أخرى. ولكن منطوق المبرهنة (مع بعض التعديل الذى يتناسب مع مصطلحات هذا البحث) يكشف عن الكيفية التي تختلف بها قاعدة كيورى عن قاعدة البرهان غير المباشر:

منطوق المبرهنة الثالثة للصيغات T للنفي لـ كيورى:

"إن إضافة قاعدة نفي النفي^(١٦) للنسق الأقل^(١٧) مكافئ لعطف قاعدة \perp وقاعدة (ن د)^(١٩) ويلزم عنه نسق كلاسيكى^(٢٠)" (Curry, H. 1977, p.) (282).

معنى هذا - كما هو واضح في جملة التكافؤ الثانية لمنطوق القاعدة - أن إضافة قاعدة (ن د) للنسق الأقل لن تنتج النسق الكلاسيكى بل نسقاً أطلق عليه كيورى TD ويمكن أن نطلق عليه نسق الأقل-كيورى. حتى يحدث ذلك - أي استخراج المنطق الكلاسيكى- لا بد من إضافة قاعدة \perp أي المنطق

الحدسى إلى قاعدة (ن د) وليس فحسب إلى المنطق الأقل. وفى جملة التكافؤ الأولى من منطوق القاعدة، نجد أن نفى النفى - الذى ينتج عن البرهان غير المباشر وينتج عنه البرهان غير المباشر (كل الصيغ تحصيل الحاصل والصحيحة متكافئة فى المنطق الكلاسيكى كما هو معلوم) - والنسق الأقل يفضيان إلى المنطق الكلاسيكى، وهو ما قلناه سابقاً بأن قاعدة البرهان غير المباشر تقضى إلى المنطق الكلاسيكى بمعىة المنطق الأقل أى إنها تقدم أكثر مما هو ضرورى.

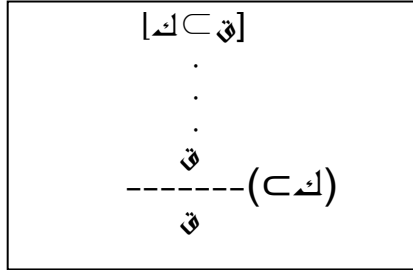
ومع هذا فإن قاعدة (ن د) تعد هي النظر لقاعدة الرد إلى المحال التالية:

$$\begin{array}{c} |ق| \\ \vdots \\ \sim ق \\ \hline (ر) \\ \sim ق \end{array}$$

هذه القاعدة وكذلك قاعدة (ن د) (وغيرهما بالطبع) تعدان فى الأدب المنطقى صورتين من صور الرد إلى المحال، وهما الصورتان اللتان اكتشفهما الجدل الإيلى بل واستخدم إقليدس صورته الكيورية (نسبة إلى كيورى) فى كتابه المبادئ بكثرة (Bochenski, M.I. 1951, pp. 16-17). فإذا كان الرد إلى المحال هو الاسم الآخر للبرهان غير المباشر، فكأننا قد تخلصنا من قاعدة البرهان غير المباشر لفظاً وتركناها مفهوماً.

ولكن إذا كان ثمة قاعدة تستطيع أن تجعل من (ن د) حالة خاصة لها وتبتعد فى الآن نفسه عن صور البرهان غير المباشر فإن هذه القاعدة تكون مطلبنا. والحقيقة أن سيلدين قد بين أن قاعدة (ن د) هي حالة خاصة من قاعدة أطلق عليها (كC)، وهى تعرف فى الأدب المنطقى تحت اسم قانون

بيرس Peirce's law (Seldin, P. J. 1989, p. 194)، وصورتها كما يلي:



على هذا النحو، لا نستطيع القول بإننا لا نزال ندور في فلك قاعدة البرهان غير المباشر.

وإذا كان لا بد لكل قاعدة تستخرج المنطق الكلاسيكي من المنطق الحدسي من تقييد فإن تقييد قاعدة سيلدين - مثلها مثل تقييد قاعدة سايدرز وفون بلاتو - هو أن تكون هي نفسها القاعدة الأخيرة في البرهان المعياري، بعد عمل التحويلات التبادلية اللازمة (Seldin, p. J. 1989, p. 205).

ظاهرٌ أن قاعدة (L ⊃ C) لدى سيلدين من جهة وقاعدة البرهان غير المباشر لدى سايدرز وفون بلاتو من جهة أخرى تتكافئان. فكلا الفريقين يقيد قاعدته بأن تكون الأخيرة، وكلاهما يقوم بعمل تحويلات تبادلية حتى يصير البرهان من خلالها معيارياً، هذا بالإضافة إلى التحويلات التبادلية على القواعد الأخرى. فإذا كان لنا أن نختار من بين القاعدتين فأيهما نختار مع كل هذا التكافؤ؟ يبدو - من وجهة نظر منطقية اشتقاقية - أن الاختيار سيكون في صالح قاعدة (L ⊃ C) فهي كما بين سيلدين لا تفترض أكثر مما هو ضروري وهو ما تفترضه قاعدة البرهان غير المباشر. فإن كان لنا أن ننشئ نسخاً استنباطياً طبيعياً كلاسيكياً فإن الاختيار سيكون في صالح (L ⊃ C) أو قانون بيرس في مقابل البرهان غير المباشر.

قد يرى البعض عدم وجود أية غضاضة في استخراج المنطق

الكلاسيكي من المنطق الأقل، ومن ثم لا يعد هذا بمثابة نقص في قاعدة البرهان غير المباشر بل مزية لها إذ تنقلنا مباشرة من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكي. ولكن يفوت هذا البعض أن المنطق الأقل قد أنشئ أصلاً لتفادي الحقيقة الحدسية (والكلاسيكية بالطبع) القائلة بأن أي شيء ينتج عن التناقض (Hackstaff, H.L. 1966, p. 232)، وعليه فإن المنطق الحدسي يسبق المنطق الكلاسيكي في هيراركية الحسابات المنطقية، وقاعدة البرهان غير المباشر ستلغى تلك الهيراركية، ستلغى الانتقال من المنطق الأقل إلى المنطق الحدسي ثم إلى المنطق الكلاسيكي، فكل ما سنتحصله منها هو انتقال من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكي مباشرة مما سيلغى الخصائص المميزة للمنطق الحدسي. فلو تخيلنا أنه كُشِفَ عن المنطق الأقل قبل المنطق الحدسي ثم أضفنا إليه قاعدة البرهان غير المباشر كنا ساعترض لن نكتشف المنطق الحدسي!

٦. خاتمة

قدمنا في هذا البحث عرضاً لأنسقة الاستنباط الطبيعي وكيفية تدرجها من الموجب إلى الأقل إلى الحدسي إلى الكلاسيكي، وكانت الإشكالية الرئيسية هي في القاعدة التي تبيح الانتقال من المنطق الحدسي إلى المنطق الكلاسيكي مع الاحتفاظ بمعيارية البراهين وعدم التفافها. لقد كانت قاعدة البرهان غير المباشر هي القاعدة الأشد ترشحاً لتكافؤها مع قاعدة نفى النفي التي أشار إليها جنتسن؛ فهي - حسب هذا الفهم - تستطيع استخراج مبرهنات المنطق الكلاسيكي من المنطق الحدسي بمعيرة قاعدة \perp الحدسية. ولقد تساءلنا في تمهيد هذا البحث وقسمه الأول عن قدرة تلك القاعدة على حفظ معيارية البراهين في الاستنباط الطبيعي للمنطق الكلاسيكي؟ وهل هذا الحفظ بكافٍ؟ ولقد تبين لنا أنه رغم قدرتها على حفظ معيارية البراهين فإن هذا الحفظ غير كاف حيث تؤدي لدى برفيتس إلى عدم اكتمال المنطق الكلاسيكي الخاضع لتلك القاعدة بعد عمل التقييدات عليها. أضف إلى هذا أن تلك القاعدة قد

عانت من تحولات خاصة على يد سايدرز وفون بلاتو تعرضنا إليها. وفي النهاية هي تفضى من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكى مباشرة وليس من المنطق الحدسى إلى المنطق الكلاسيكى بخلاف ما اعتقد جنتسن وبرافيتس وسایدرز وفون بلاتو، وهو أمر أشار إليه كيورى وسيلدين بحق ولقد بينا السبب في ذلك. فإن كان هذا الحفظ غير كاف تبقت الإجابة عن سؤال آخر طرحناه عن إمكانية وجود قاعدة بديلة؟ كبديل كان هناك مرشحان هما قاعدة (ن د) لكيورى وقاعدة (لـC) لسيلدين؛ ولكننا بينا أن قاعدة (ن د) لكيورى هي صورة أخرى من صور البرهان غير المباشر، بينما قاعدة (لـC) لسيلدين فارقت البرهان غير المباشر، فهي ما يعرف بقانون بيرس، وهي إذ جعلت قاعدة (ن د) لكيورى حالة خاصة لها وابتعدت عن البرهان غير المباشر أصبحت خير بديل لقاعدة البرهان غير المباشر. وهكذا؛ كانت الإجابة عن سؤال إمكانية وجود بديل أن نعم؛ فقاعدة سيلدين تستجيب بالإيجاب لكافة أسئلة البحث فهي إذ تحفظ البراهين على نحو كاف تنتقل بأنسقة المنطق الطبيعى على نحو تدريجى من الموجب إلى الأقل إلى الحدسى إلى الكلاسيكى بخلاف قاعدة البرهان غير المباشر التي تقفز من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكى مباشرة. وفي سياق كل هذا بينا في هذا البحث ما هو القصور المنطقى الذى أشار إليه جنتسن في قاعدة نفى النفى عندما تضاف إلى الحساب البديهى بغرض إنشاء الحساب الكلاسيكى؛ وذلك أنها ستشكل التفافاً في البرهان قاراً فيه إذ تعبر عن تقديم ثم حذف إما لإجراء الشرط أو النفى. كذلك أوضحنا ضرورة تقييد قاعدة البرهان غير المباشر دون ترخص كما فعل برافيتس، وذلك على نهج تلميذه فون بلاتو. بينا كذلك الأساس الذى يقف خلف The Rationale تبادل سايدرز وفون بلاتو لقاعدة البرهان غير المباشر. كذلك بينا المقصد المنطقى لعبارة سيلدين بأن قاعدة البرهان غير المباشر تقدم أكثر مما هو ضرورى للمنطق الحدسى. وهو البيان الذى يتفق مع المبرهنة الثالثة للصياغات T لأنسقة النفى لدى كيورى.

الهوامش:

(١) أود أن أتقدم بالشكر لمحكم هذا البحث، حيث بفضلته وتوجيهه صُكِّ هذا المصطلح حيث كنت قد اخترت التواء.

(٢) ليس هذا بإطلاق، فيمكن أن توجد بالإضافة إلى قواعد الاستنتاج بديهية أو أكثر في نسق الاستنباط الطبيعي مثل نسق فيتش على سبيل المثال (Fitch, B. F. 1952, p.) (13).

(٣) انظر القسم التالي من هذا البحث من أجل نموذج له.

(٤) جدير بالذكر أن جوتلوب فريجه G. Frege (١٨٤٨-١٩٢٥) هو الآخر كان قد تبنى أيضاً بعداً ثنائياً في إثبات خطوات الاستدلال في الأنسقة الأكسيوماتيكية.

(٥) انظر القسم التالي وما يليه من أجل نماذج لقواعد الاستنتاج والبراهين في الصورة الشجرية.

(٦) كان عالم المنطق الألماني بول هيرتس P. Hertz هو أول من استخدم الشجرة، أو البراهين الشبيهة بالشجرة على حد تعبيره، كعرض للبرهان: (Schroeder-Heister,) (P. 2002, p. 251; von Plato, J. 2012b, p. 324).

(٧) هذا تعريف تقريبي لهذه المرحلة من البحث، انظر القسمين الثاني والثالث من هذا البحث من أجل تعريف أدق.

(٨) يقصد بالمنطق الكلاسيكي كل منطق يشتمل على المبرهنات الأساسية في كتاب رسل وهوايتيد مبادئ الرياضيات، أو هو المنطق الذي يأخذ كبديهية أو يبرهن على قانون الثالث المرفوع. أما المنطق الحدسي فهو المنطق الذي لا يمكن البرهنة فيه على الثالث المرفوع، إضافة إلى فهم خاص لإجراء النفي. انظر القسم التالي من هذا البحث لمزيد من التفاصيل.

(٩) في أوراقه المطبوعة - كما هو معروف - برهن جنتسن على معيارية المنطق الحدسى والكلاسيكى في حسابه للمتتابعات Sequents.

(١٠) بالنسبة لطرق كتابة البرهان في صورة خطية ذات البعد الواحد فإن قاعدة تقديم العطف تأخذ فيها الشكل التالى بعامة:

١. ق هـ

٢. ك هـ

٣. ق & ك هـ (&١٠٢)

حيث يشار عادة إلى خطوات البرهان بإعطاء كل خطوة عدداً على نحو تصاعدى يكتب على يمين البرهان (وإن كان لا يدخل في عداد البرهان)، ثم يلي العدد الصيغة، ثم يليها رمز القاعدة المستخدمة وأرقام الخطوات السابقة (إن وجدت) التي تطبق عليها القاعدة. وهكذا فالبرهان السابق ذو الثلاث خطوات يتضمن مقدمتين أو صيغتين، فرضين كليهما، رمزنا إليهما بالرمز هـ كتبناه على يسار الفرض الصيغة، وانتهينا إلى نتيجة من هذين الفرضين ألا وهى ق & ك، وأشرنا إلى القاعدة المستخدمة في استنتاجها ألا وهى (&١٠٢) وإلى أرقام السطور السابقة المستخدمة في التطبيق. وللقارئ أن يقيس سائر القواعد والبراهين الشجرية في هذا البحث على ذلك النحو الخطى، حيث إن البحث الحالي يهتم بالبراهين الشجرية فقط، وليس هدفه إجراء مقارنة بينها وبين البراهين الخطية. وتوجد صياغات عديدة للبراهين الخطية - مثل صياغات ياكوفسكى وكواين وسبز التي أشرنا لها سابقاً في القسم الأول - لعل أبسطها صياغة فيتش في (Fitch, F. B.; 1952). وبالعربية: (د. أحمد أنور أبو النور: المنطق الطبيعى: دراسة في نظرية الاستنباط الطبيعى، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع، ١٩٣٩).

(١١) انظر هذه الشروط في: (von Plato, J. 2013, ch. 8).

(١٢) هذه المقاييس فصلها وزادها صقلاً داج برافيتس، انظر: (prawitz, D. 1965, pp. 25-29).

(١٣) الصيغة الذرية هي أصغر صيغة سليمة في معجم النسق المنطقى تحت الدراسة، ولا يدخلها التركيب، ففي منطق العبارات تعد الصيغ ق، ك، ... صيغاً ذرية، وفي منطق المحمول تعد الصيغ م س، م س ص، م أ ب ج صيغاً ذرية (حيث ترمز م إلى محمول

ما، وس و ص إلى متغيرات، وأ، ب، ت، إلى ثوابت منطقية). ولعل القارئ قد لاحظ
إننا نكتب المحمول يمين المتغيرات والأسماء. حيث إن لغتنا الرمزية تُقرأ من اليمين.

(١٤) ومع ذلك يجب أن نستثنى قاعدة تقديم السور الكلى، حيث تند عن التحويل التباديلى
(von Plato, J. 2013, p.)

(١٥) انظر منطوق هذه القاعدة فيما يلى من هذا البحث.

(١٦) يستخدم كيورى الرمز NK كرمز لقاعدة نفى النفى.

(١٧) يستخدم كيورى الرمز TM كرمز للمنطق الأقل.

(١٨) يستخدم كيورى الرمز Nj كرمز لهذه القاعدة.

(١٩) يستخدم كيورى الرمز Nd كرمز لقاعدته.

(٢٠) يستخدم كيورى الرمز PK للإشارة إلى أنسقة كلاسيكية مغايرة.

المراجع

1. Bochenski, M. I. (1951) *Ancient Formal Logic*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
2. Carnap, R. (1937) *Logical Syntax of Language*, A. Smeaton (trans.), London: Kegan Paul.
3. Curry, H.B. (1977) *Foundations of Mathematical Logic*, New York: Dover Publications Ink.
4. Fitch, B. F. (1952) *Symbolic Logic: An Introduction*, New York: The Ronald Press Company.
5. Gentzen, G. (1933/2008) "The Normalizations of Derivations: Dissertation. III. Chapter," in: J. von Plato (trans.), pp. 245-257.
6. Gentzen, G. (1934-1935/1969) "Investigations Into Logical Deduction," in G. Gentzen (1969), pp. 68-131.
7. Gentzen, G. (1969) *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. Szabo (ed.), North-Holland, Amsterdam.
8. Glavenco, V. (1929/1998) "On Some Points of the Logic of Mr. Brouwer," in: P. Mancosu (ed.), 1998, pp. 301-305.
9. Hackstaff, H. L. (1966) *Systems of Formal Logic*, Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.
10. Heyting, A. (1930a/1998) "On Intuitionistic Logic," in: P. Mancosu (ed.), 1998, pp. 306-310.
11. Heyting, A. (1930b/1998) "The Formal Rules of Intuitionistic Logic," in: P. Mancosu (ed.), 1998, pp. 311-327.
12. Mancosu, p. (ed.) (1998), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Oxford University Press.
13. Pelletier, J. F. & Hazen, P. A. (2012) "A History of Natural Deduction." In: D. M. Gabbay, F. J. Pelletier and J. Woods (eds), *Handbook of the History of Logic*, Vol. 11: Logic: A History of General Concepts, Elsevier B.V., pp. 341-
14. Prawitz, D. (1965) *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Stockholm: Almqvist & Wiksell.
15. Schroeder-Heister, P. (2002) "Resolution and the Origins of Structural Reasoning: Early Proof-Theoretic Ideas of Hertzand

- Gentzen,” in: *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 8, No. 2, pp. 246-265.
- 16.Seldin, P. J. (1989) “Normalization and Excluded Middle, I.” in: *Studia Logica*, Vol. 48, No. 2, pp. 173-217.
- 17.Siders, A. & von Plato, J. (2012) “Normal Derivability in Classical Natural Deduction,” in: *The Review of Symbolic Logic*, Vo. 5, No. 2, pp. 205-211.
- 18.von Plato, J. (2008) “Gentzen’s Proof for Normalization of Natural Deduction,” in: *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vo. 14, No. 2, pp. 240-257.
- 19.von Plato, J. (2012) “Gentzen’s Proof Systems: Byproducts In A Work Of Genius,” in: *The Bulletin Of Symbolic Logic*, Vol. 18, No. 3, pp. 313-367.
- 20.von Plato, J.(2013) *Elements of Logical Reasoning*, Cambridge: Cambridge University Press.
- 21.Yuuki, A. (1994) “A Normalization-Procedure For The First Order Classical Natural Deduction With Full Logical Symbols,” in: *Tsukuba J. Math*, Vol. 19 No. 1. Pp. 153-162.